テータ・ワイル和 (数論的関数の特性)

中井, 喜信

数理解析研究所講究録
274巻 1976年 37-49

テータ・ワイル和

名大理　中井喜信

0°　今ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 内のベクトルは縦ベクトルで記すものとして、$\mathfrak{G}$ を $\mathbb{R}^n$ 内の有界閉凸多面体とし、又 $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{v} \in \mathbb{R}^n$ を用意する。今 A を $n\times n$ の実対称行列として、表題に言う所の「テータ・ワイル和」とは次の有限和の事である。

$$\theta(A,\mathfrak{a};\mathfrak{G},\mathfrak{v}) \underset{\mathrm{df.}}{=} \sum_{\mathfrak{n}\in\mathfrak{G}} e\left(\tfrac{1}{2}A[\mathfrak{n}+\mathfrak{v}] + \langle \mathfrak{a},\mathfrak{n}\rangle\right),$$

但し、$\mathfrak{n}$ は $\mathfrak{G}$ 内の格子点を動き、$A[\mathfrak{x}] = {}^t\mathfrak{x}A\mathfrak{x}$　$(\mathfrak{x}\in\mathbb{R}^n)$、$\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathbb{R}^n$ のユークリッドの内積、$e(x) = e^{2\pi i x}$　$(x\in\mathbb{R})$ である。又 A が正則ならば、代りに

$$\theta(A;\mathfrak{G},\mathfrak{v}) \underset{\mathrm{df.}}{=} \sum_{\mathfrak{n}\in\mathfrak{G}} e\left(\tfrac{1}{2}A[\mathfrak{n}+\mathfrak{v}]\right)$$

を扱う事にする。この和を、n 及び $\mathfrak{G}$ の頂点のケ数は $O(1)$ と見なして、誤差 $O(\{\mathfrak{G}\text{の体積}\}^{\frac{1}{2}})$ 又は $O(\{\mathfrak{G}$ の

直径 $\}^{\frac{h}{2}})$ を許して、Diophantus 的に表示したい。 $h=1$ の場合は [1] に扱われている。 ここでは、[2] の続きとして $h=2$ の場合の様子を述べる。

1° 復習として $h=1$ の場合は次のようになっていた。今記号を少しかえ、α, X, N, γ を実数 $(\alpha \neq 0,\ N>0)$ として

$$\vartheta\left(\frac{1}{\alpha};\ N, X, \gamma\right) \underset{\text{df.}}{=} \sum_{X \leq n \leq X+N} e\left(\frac{1}{2\alpha}(n+\gamma)^2\right)$$

とおく。 之に対して次の両者が成立する。

(Lemma 1) $\varepsilon = \pm 1$, $\alpha > 0$, $\frac{1}{\alpha} = a + \alpha'$ $(a \in \mathbb{N},\ \underset{\neq 0}{\alpha' \in \mathbb{R}})$, γ, γ' は実数で $\frac{1}{2}a - \gamma \equiv \alpha'^{-1}\gamma' \mod. 1$, となっていて、更に $N \geqq 2\alpha$ と仮定すれば

$$\vartheta\left(\frac{\varepsilon}{\alpha};\ N, X, \gamma\right) = e\left(\varepsilon\left\{\frac{1}{8}+\frac{\gamma'^2}{2\alpha'}\right\}\right)\cdot \vartheta\left(\frac{-\varepsilon}{\alpha'};\ \frac{N}{|\alpha|}, \frac{X}{|\alpha|}, \gamma'\right)\cdot |\alpha|^{\frac{1}{2}} + O\left(1+|\alpha|^{\frac{1}{2}}\right)$$

が成立する。

(Lemma 2) $\varepsilon = \pm 1$, $\alpha > 0$, $\frac{\alpha}{2} \geqq N > 0$ とし、又 $\gamma, \tilde{\gamma}$ は実数で $\tilde{\gamma} \equiv \gamma \mod. \alpha$ 及び 区間 $\left[\frac{X+\tilde{\gamma}}{\alpha}, \frac{X+N+\tilde{\gamma}}{\alpha}\right]$ は区間 $\left[-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right]$ に含まれているものとする。この時

$$\vartheta\left(\frac{\varepsilon}{\alpha}; N, X, \gamma\right) = e\left(\varepsilon\cdot\frac{\gamma^2-\tilde{\gamma}^2}{2\alpha}\right)\cdot\int_{X+\tilde{\gamma}}^{X+\tilde{\gamma}+N} e\left(\frac{\varepsilon}{2\alpha}u^2\right)du \quad + O(1)$$

が成立する。

以上はいずれも古典的であるが、両者を組み合わせて一般の場合の $\vartheta(\frac{1}{\alpha}\cdot; N, X, \gamma)$ の誤差 $O(N^{\frac{1}{2}}+1)$ を含む Diophantus 的な表示を得る。([1] を参照されたい*)) 各誤差項は次節 2° 中の $\Psi_\varepsilon(y)$ を使えば、級数の形で表わせる。いわゆる Bruhat 分解を使えば ($h=1$ の場合) 形は見易くなる。

2° $h=2$ の場合にも上記の Lemma 達に相当する事が得られるが複雑であるので Lemma 1 の類似について結果のみ述べる事とする。ここではすべて誤差項はいわゆる log.-因子だけ期待する表示より劣っている。以下の事は [2] も参照されたい。今 $y\geq 0$, $\varepsilon=\pm 1$ に付し

$$\Psi_\varepsilon(y) \underset{\mathrm{df}}{=} e\left(-\frac{\varepsilon}{2}y^2\right)\cdot\int_y^\infty e\left(\frac{\varepsilon}{2}u^2\right)du$$

---

*)
[1] の 166 ページ (2) 式は次の如くに訂正する。

$$X_{k+2} = (\alpha_0\cdots\alpha_{k+1})^{-1}X_0 + (-1)^{k+1}\alpha_0^{-1}\gamma_0 A_k +$$
$$+ (-1)^{k+1}\frac{1}{2}(-A_k+B_k) + (-1)^k E_k + \frac{1}{2} \quad .$$

従って 171 ページ (2) の条件偶奇は入れかえる。

とおく。又 A は 2×2 の実対称行列で $\det A \neq 0$, 及び $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in \mathbb{R}^2$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ は $\mathbf{b}_1 \not\parallel \mathbf{b}_2$, $k_1 k_2 (k_2 - k_1) \neq 0$ とし、$\mathbb{P}, \gamma \in \mathbb{R}^2$, $D > 0$ を用意する。更に $\mathbb{K}_1 = A\cdot(\mathbb{P}+\gamma)$, $\mathbb{K}_2 = \mathbb{K}_1 + \Delta^{-1}\cdot D\cdot\begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}\cdot(\mathbf{b}_2-\mathbf{b}_1)$ 但し $\Delta = \det(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1)$ とおく。この時

$$\Psi = \Psi(A^{-1};\ \mathbf{b}_2, k_2;\ \mathbf{b}_1, k_1;\ \mathbb{P}, \gamma, D)$$

$$\overset{=}{\text{def.}} \sum_{m} \int_0^D dt\cdot \operatorname{sgn}\left(t - \langle \mathbf{b}_1, m - \mathbb{K}_1\rangle\right) \times |k_2 - k_1|^{\frac{1}{2}} \times \Psi_{\operatorname{sgn} k_1}\left(|k_1|^{\frac{1}{2}}\left|t - \langle \mathbf{b}_1, m - \mathbb{K}_1\rangle\right|\right) \times$$

$$\times\ e\left(\frac{k_2}{2}\left\{t - \langle \mathbf{b}_2, m - \mathbb{K}_1\rangle\right\}^2 - \langle m, \mathbb{P}\rangle - \frac{1}{2}A^{-1}[m - \mathbb{K}_1] + \frac{1}{2}\frac{k_1 k_2}{k_2 - k_1}\left\{\langle \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1, m - \mathbb{K}_1\rangle\right\}^2 + \frac{1}{2}A^{-1}[\mathbb{K}_1]\right)$$

$$- \sum_{m} \operatorname{sgn} k_2 \cdot \operatorname{sgn}(k_2 - k_1)\cdot \operatorname{sgn}\langle \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1, m - \mathbb{K}_1\rangle \times e\left(\frac{1}{8}\operatorname{sgn} k_1\right) \times$$

$$\times\ \Psi_{\operatorname{sgn}(k_2 - k_1)}\left(\frac{|k_2|}{|k_2 - k_1|^{\frac{1}{2}}}\cdot\left|\langle \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1, m - \mathbb{K}_1\rangle\right|\right) \cdot$$

$$\times\ e\left(\frac{1}{2}\frac{k_2^2}{k_2 - k_1}\left\{\langle \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1, m - \mathbb{K}_1\rangle\right\}^2 - \frac{1}{2}A^{-1}[m - \mathbb{K}_1] - \langle m, \mathbb{P}\rangle + \frac{1}{2}A^{-1}[\mathbb{K}_1]\right)$$

とおく。 ここに 第一の和は $\mathbb{R}^2$ 内の格子点を動き、第二の和は $\mathbb{R}^2$ 内の格子点で $\prod_{j=1}^{2}\langle \mathbf{b}_j, m - \mathbb{K}_j\rangle \le 0$ となるものの上の和である。実際にはこの右辺の無限級数の収束は判定難であるので、[2] の §1 Lemma 2 により、$m = \binom{m_1}{m_2}$ はいつも $|m_j| \le M_j$ $(j=1,2)$ の範囲に制限して、有限和として扱うのであるが、その為の修正項を記す事は略す。従っ

て以下の等式（$\doteqdot$）は、すべてDiophantus的な修正項を追加して後はじめて成立しているものと見られたい。

多辺形 $\mathfrak{B}$ の各辺を $\mathbb{P}_1\mathbb{P}_2 = \left\{ \binom{\cos\rho}{\sin\rho} t + \mathbb{P}_1 \; ; \; 0 \le t \le D \right\}$ で表わし．又 $A = \begin{pmatrix}\delta_1 & \\ & \delta_2\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\right]$ と直交行列で対角化して $\varepsilon_j = \mathrm{sgn}\,\delta_j$ $(j=1,2)$, $0 \ne |\delta_j| \ll 1$ $(j=1,2)$ とする。仮定として、各辺に対し $A\left[\binom{\cos\rho}{\sin\rho}\right] \ne 0$，及びもし $\sin(\theta-\rho)\ne 0$ ならば $|\sin(\theta-\rho)| \gg 1$ となっているものとする。

［定理 1］ $A^{-1} = R + A'$，R は整数係数の対称行列 $\left(=\begin{pmatrix} r_1 & r' \\ r' & r_2\end{pmatrix}\right)$，$A'$ は実対称行列として $\det A \ne 0$, $\det A' \ne 0$ とすれば

$$\vartheta(A;\mathfrak{B},\gamma) \doteqdot |\det A|^{-\frac12}\, e\left(\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{8}\right)\cdot e\left(\tfrac12 A'[\gamma']\right)\times\vartheta\left(-A'; A(\mathfrak{B}+\gamma), \gamma'\right)$$

$$+ \sum_{m\in\partial\mathfrak{B}} \frac12 \cdot e\left(\tfrac12 A[m+\gamma]\right)$$

$$+ \sum_{\mathfrak{B}\text{の辺}} (\pm)\cdot|\det A|^{-\frac12}\times\psi\left(A^{-1}\,;\, \frac{\binom{\cos\rho}{\sin\rho}}{A\left[\binom{\cos\rho}{\sin\rho}\right]}, -A\left[\binom{\cos\rho}{\sin\rho}\right] ; \frac{\binom{\cos\theta}{\sin\theta}}{\delta_1\cos(\theta-\rho)}, \delta_1\cos^2(\theta-\rho)\; ; \;\mathbb{P}, \gamma, D\right)$$

$$+ O\left(\left(1+|\det A|^{-\frac12}\right)\times\log\text{因子}\right)$$

となる。但し $\gamma' \underset{\mathrm{df}}{=} -A^{-1}\cdot\left(\gamma - \tfrac12\binom{r_1}{r_2}\right)$ であり $\mathbb{P}$ は $t=0$ における辺 $\mathbb{P}_1\mathbb{P}_2$ の頂点、又 辺 $\mathbb{P}_1\mathbb{P}_2$ が $\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}\cdot(\mathfrak{B}+\gamma)$ において水平又は垂直になる時は適当に極限移行により ψ

を考える。

之は [2] §3 の Proposition 1 の書きかえである。

3° 今 ψ の定義の中の二つの級数のうち積分を含む方を ψ_I，含まぬ方を ψ_Σ とおき、更に ψ_Σ において m が $\prod_{j=1}^{2} \langle \mathbf{b}_i, m-\mathbf{k}_j \rangle = 0$ となる時はその項に重み $\frac{1}{2}$ をつけた級数を ψ_Σ^* とし $\psi^* = \psi_I + \psi_\Sigma^*$ とおく。

(Lemma 3) $A^{-1} = R + A'$，(R, A' は定理 1 と同様) として $\Delta = \det(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1) \neq 0$ を仮定する。この時

(イ) $A'[x] = k_2 \cdot \{\langle \mathbf{b}_2, x \rangle\}^2 + \dfrac{k_1 k_2}{k_2 - k_1} \{\langle \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1, x \rangle\}^2$，であれば

$$\psi^*(A^{-1}; \mathbf{b}_2, k_2; \mathbf{b}_1, k_1; \mathbf{P}, \gamma, D)$$

$$\doteqdot |\det A'|^{-\frac{1}{2}} \times e\left(\tfrac{1}{2} A'^{-1}[\gamma']\right) \times \operatorname{sgn}\left(k_2 \cdot \check{A}[\mathbf{b}_1] \times \left({}^t\mathbf{b}_1 \cdot \check{A} \cdot (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1)\right)\right) \times e\left(\tfrac{\varepsilon_1}{8}\right) \times$$

$$\times\, e\left(\tfrac{1}{8} \operatorname{sgn}(k_2 - k_1)\right) \times$$

$$\times\, \psi^*\left(\begin{array}{l} -A'^{-1};\ \dfrac{\Delta \cdot \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} \cdot (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1)}{(-)\, \check{A}'[\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1]},\ (-)\dfrac{\check{A}'[\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1]}{\Delta^2}; \\ ;\ \dfrac{\Delta \cdot \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} \cdot \mathbf{b}_1}{\left({}^t\mathbf{b}_1 \cdot \check{A}' \cdot (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1)\right)},\ (-)\dfrac{\{{}^t\mathbf{b}_1 \cdot \check{A}' \cdot (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1)\}^2}{\Delta^2 \cdot \check{A}'[\mathbf{b}_1]}; \\ ;\ -A \cdot (\mathbf{P} + \gamma),\ -A'^{-1} \cdot \left(\gamma - \tfrac{1}{2}\binom{r_1}{r_2}\right),\ D \end{array} \right)$$

$$+\, O(\log\text{-因子})$$

となる。但し D は両辺で共通であり、又 $\check{A} = (-)\begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}$。

(ロ) $\dfrac{\Delta^2 k_2^2}{k_2-k_1} - \check{A}'[\mathbb{b}_1] \neq 0$, $\det A' + \dfrac{k_2}{k_2-k_1}\Big(k_1 k_2 \Delta^2 -$

$- (k_2-k_1)\cdot\check{A}'[\mathbb{b}_2] - k_1\,\check{A}'[\mathbb{b}_2-\mathbb{b}_1]\Big) \neq 0$

より

$$\psi_{\mathrm{I}}\,(A^{-1}\,;\,\mathbb{b}_2, k_2\,;\,\mathbb{b}_1, k_1\,;\,\mathbb{P}, \gamma, D)$$

$$\doteqdot |\det A'|^{-\frac{1}{2}}\cdot e\left(\tfrac{1}{2}A'^{-1}[\gamma']\right)\cdot \mathrm{sgn}\left(\det A' - \frac{\check{A}'[k_2\mathbb{b}_2 - k_1\mathbb{b}_1]}{k_2-k_1}\right)\times$$

$$\times\,\mathrm{sgn}\left(\frac{k_2}{k_2-k_1}\cdot{}^t(\mathbb{b}_2-\mathbb{b}_1)\,\check{A}'\,(k_2\mathbb{b}_2-k_1\mathbb{b}_1) - \det A'\right)\times$$

$$\times\, e\left(\frac{1}{8}\,\mathrm{sgn}\left(\frac{k_2^2\Delta^2}{k_2-k_1} - \check{A}'[\mathbb{b}_1]\right)\right)\times$$

$$\times\Bigg\{ e\left(\frac{\varepsilon_1}{8}\right)\times\psi_{\mathrm{I}}\left(-A'^{-1}\,;\,\frac{\frac{\Delta k_2^2}{k_2-k_1}(1,-1)(\mathbb{b}_2-\mathbb{b}_1) - \check{A}'\mathbb{b}_1}{\frac{k_2^2}{k_2-k_1}\cdot\check{A}'[\mathbb{b}_2-\mathbb{b}_1] - \det A'}\,,\,(-)\,\frac{\frac{k_2^2}{k_2-k_1}\check{A}'[\mathbb{b}_1] - \det A'}{\frac{\Delta^2 k_2^2}{k_2-k_1} - \check{A}'[\mathbb{b}_1]}\,;\right.$$

$$;\ \frac{\frac{\Delta k_2}{k_2-k_1}(1,-1)(k_2\mathbb{b}_2-k_1\mathbb{b}_1) - \check{A}'\cdot\mathbb{b}_1}{\frac{k_2}{k_2-k_1}\cdot{}^t(\mathbb{b}_2-\mathbb{b}_1)\,\check{A}'\,(k_2\mathbb{b}_2-k_1\mathbb{b}_1) - \det A'}\,,$$

$$,\ \frac{\left\{\frac{k_2}{k_2-k_1}\,{}^t(\mathbb{b}_2-\mathbb{b}_1)\,\check{A}'(k_2\mathbb{b}_2-k_1\mathbb{b}_1) - \det A'\right\}^2}{\left(\frac{\Delta^2 k_2^2}{k_2-k_1} - \check{A}'[\mathbb{b}_1]\right)\left(\det A' - \frac{1}{k_2-k_1}\check{A}'[k_2\mathbb{b}_2-k_1\mathbb{b}_1]\right)}\,;$$

$$\left.;\ -A\cdot(\mathbb{P}+\gamma)\,,\ -A'^{-1}\left(\gamma - \tfrac{1}{2}\binom{v_1}{v_2}\right)\,,\ D\right)$$

$$- e\left(\frac{1}{8}\,\mathrm{sgn}\left(\frac{k_2^2\Delta^2}{k_2-k_1} - \check{A}'[\mathbb{b}_1]\right)\right)\times\mathrm{sgn}\left(\det A' + \frac{k_2}{k_2-k_1}\left(k_1k_2\Delta^2 - k_1\check{A}'[\mathbb{b}_2] - (k_2-k_1)\cdot\check{A}'[\mathbb{b}_2-\mathbb{b}_1]\right)\right)\times$$

$$\times\,\psi_{\mathrm{I}}\left(-A'^{-1}\,;\,\frac{\frac{\Delta k_1k_2}{k_2-k_1}(1,-1)(\mathbb{b}_2-\mathbb{b}_1) - \check{A}'\mathbb{b}_2}{\frac{k_1k_2}{k_2-k_1}\cdot\check{A}'[\mathbb{b}_2-\mathbb{b}_1] - \det A'}\,,\right.$$

$$
\left\{ \quad \left| \begin{array}{l}
,\ (-)\, k_2 \cdot \dfrac{\frac{k_1 k_2}{k_2-k_1}\cdot \check{A}'[\mathbf{b}_2-\mathbf{b}_1] - \det A'}{\det A' + \frac{k_2}{k_2-k_1}\cdot ((*))}\ ; \\[2ex]
;\ \dfrac{\frac{\Delta k_2}{k_2-k_1}\,(1, {}^{-1})(k_2\mathbf{b}_2 - k_1\mathbf{b}_1) - \check{A}'\mathbf{b}_1}{\frac{k_2}{k_2-k_1}\cdot {}^t(\mathbf{b}_2-\mathbf{b}_1)\cdot\check{A}'\cdot(k_2\mathbf{b}_2-k_1\mathbf{b}_1) - \det A'}\ , \\[2ex]
,\ k_1 \dfrac{\left(\frac{k_2}{k_2-k_1}\,{}^t(\mathbf{b}_2-\mathbf{b}_1)\cdot\check{A}'(k_2\mathbf{b}_2-k_1\mathbf{b}_1) - \det A'\right)^2}{\left(\det A' - \frac{\check{A}'[k_2\mathbf{b}_2-k_1\mathbf{b}_1]}{k_2-k_1}\right)\cdot\left(\det A' + \frac{k_2}{k_2-k_1}((*))\right)}\ ; \\[2ex]
;\ -A\cdot(\mathbf{p}+\mathbf{r}),\ \ -A'^{-1}\left(\mathbf{r}-\frac{1}{2}\binom{r_1}{r_2}\right),\ \ D
\end{array} \right) \right.
$$

となる。但し $\check{A} = (-)\,(1, {}^{-1})\,A\,(1, {}^{-1})$ であり、右辺第2式中 $((*))$ と略記したものは $k_1k_2\Delta^2 - k_1\cdot\check{A}'[\mathbf{b}_2] - (k_2-k_1)\cdot\check{A}'[\mathbf{b}_2-\mathbf{b}_1]$ である。

(ハ) $\dfrac{\Delta^2 k_2^2}{k_2-k_1} - \check{A}'[\mathbf{b}_1] \neq 0$ ならば

$$\psi_0^*(A^{-1};\ \mathbf{b}_2, k_2;\ \mathbf{b}_1, k_1;\ \mathbf{p}, \mathbf{r}, D)$$

$$\doteqdot |\det A'|^{-\frac{1}{2}}\, e\left(\tfrac{1}{2} A'^{-1}[\mathbf{r}']\right)\cdot \varepsilon_2\, \mathrm{sgn}\left(\check{A}'[\mathbf{b}_1]\right)\, \mathrm{sgn}\left({}^t\mathbf{b}_1\check{A}'(\mathbf{b}_2-\mathbf{b}_1)\right)\cdot e\left(\tfrac{\varepsilon_1}{8}\right)\times$$

$$
\times\left\{ \begin{array}{l}
e\left(\frac{1}{8}\,\mathrm{sgn}(k_2-k_1)\right)\times \\[1ex]
\times\ \psi_I\left(\begin{array}{l}
-A'^{-1};\ \dfrac{\Delta(1,{}^{-1})(\mathbf{b}_2-\mathbf{b}_1)}{\check{A}'[\mathbf{b}_2-\mathbf{b}_1]},\ \ (-)\dfrac{\check{A}'[\mathbf{b}_2-\mathbf{b}_1]}{\Delta^2}\ ; \\[2ex]
;\ \dfrac{\Delta(1,{}^{-1})\mathbf{b}_1}{{}^t\mathbf{b}_1\check{A}'(\mathbf{b}_2-\mathbf{b}_1)},\ \ (-)\dfrac{\{{}^t\mathbf{b}_1\check{A}'(\mathbf{b}_2-\mathbf{b}_1)\}^2}{\Delta^2\cdot\check{A}'[\mathbf{b}_1]}\ ; \\[2ex]
;\ -A\cdot(\mathbf{p}+\mathbf{r}),\ \ (-)A'^{-1}\left(\mathbf{r}-\frac{1}{2}\binom{r_1}{r_2}\right),\ \ D
\end{array} \right)
\end{array} \right\}
$$

$; -$

$$\left\{ \begin{aligned} &- e\left(\frac{1}{8}\operatorname{sgn}\left(\frac{\Delta^2 k_2^2}{k_2-k_1} - \check{A}'[\mathfrak{b}_1]\right)\right) \times \\ &\times \Psi_I\left(-A'^{-1} ; \frac{\frac{\Delta k_2^2}{k_2-k_1}({}_{1}^{-1})(\mathfrak{b}_2-\mathfrak{b}_1) - \check{A}'\mathfrak{b}_1}{\frac{k_2^2}{k_2-k_1}\check{A}'[\mathfrak{b}_1] - \det A'} , (-)\frac{\frac{k_2^2}{k_2-k_1}\check{A}'[\mathfrak{b}_1] - \det A'}{\frac{\Delta^2 k_2^2}{k_2-k_1} - \check{A}'[\mathfrak{b}_1]} ; \right. \\ &\quad ; \frac{\Delta({}_{1}^{-1})\mathfrak{b}_1}{{}^t\mathfrak{b}_1\cdot\check{A}'(\mathfrak{b}_2-\mathfrak{b}_1)} , (-)\frac{k_2^2}{k_2-k_1}\cdot\frac{\{{}^t\mathfrak{b}_1\check{A}'(\mathfrak{b}_2-\mathfrak{b}_1)\}^2}{\check{A}'[\mathfrak{b}_1]\cdot\left(\frac{\Delta^2 k_2^2}{k_2-k_1} - \check{A}'[\mathfrak{b}_1]\right)} ; \\ &\quad \left. ; -A\cdot(\mathfrak{p}+\mathfrak{r}) , (-)A^{-1}\cdot\left(\mathfrak{r} - \frac{1}{2}\binom{v_1}{v_2}\right) , D \right) \end{aligned} \right\}$$

となる。

この Lemma の (イ) 及び (ロ), (ハ) と場合が分れるのは、[2] の Lemma 4, Lemma 5 に対応している。各 Ψ_I は [2] の Lemma 7 を使えば、誤差項を許して、Ψ_0 に似た形の三種の級数の和で表わす事が出来る。

4° 今 A を実対称行列として $k \geq 0$ に対し A_k その他を次の如くに定める。

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 \equiv A \mod. 1 , \\ k \geq 0 \text{ に対し } \det A_k \neq 0 \text{ なら } A_k^{-1} = R_k + A_{k+1} \\ \text{但し } R_k = \begin{pmatrix} v_1^{(k)} & v^{(k)} \\ v^{(k)} & v_2^{(k)} \end{pmatrix} \text{ は整数係数の対称行列}, \\ \qquad A_{k+1} \text{ は実対称行列} \end{array} \right.$$

として、P_k, Q_k を

$$P_k = R_k \cdot P_{k-1} + P_{k-2} \qquad P_0 = R_0 , \qquad P_{-1} = 1_n$$

$$Q_k = R_k \cdot Q_{k-1} + Q_{k-2} \qquad Q_0 = 1_h, \quad Q_{-1} = (0)_h$$

とし．以下 $\det P_k \neq 0$, $\det Q_k \neq 0$ は仮定する。又

$$\tilde{B}_k = A_k \cdots A_1 \quad (k \geq 1), \qquad \tilde{B}_0 = 1_h,$$

$$\mathbb{U}_{k+1} = (\det Q_k)\cdot\left(A_0^{-1} - Q_k^{-1} P_k\right) \quad (k \geq 0), \quad \mathbb{U}_0 = (0)_h$$

とおき $\mathbb{P}^{(0)} = \mathbb{P}$, $\gamma^{(0)} = \gamma$ から始めて

$$\mathbb{P}^{(k+1)} = (-)\, A_k \cdot \left(\mathbb{P}^{(k)} + \gamma^{(k)}\right) \qquad (k \geq 0)$$

$$\gamma^{(k+1)} = (-)\, A_{k+1}^{-1} \cdot \left(\gamma^{(k)} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} v_1^{(k)} \\ v_2^{(k)} \end{pmatrix}\right) \qquad (k \geq 0)$$

とおく。 $h \geq 3$ ならば ユニモデュラ行列で"掛ける操作"を追加すべきであろうが、ここでは略す。

(Lemma 4) $h = 2$ の時 $\|(\cdots)\|$ を行列のユークリッドのノルムとすれば

$$\|A_k \cdots A_0\| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \|A_{k-1} \cdots A_0\|$$

$$\|A_k\| \ll 1 \qquad (k \geq 1)$$

となるように R_k を選ぶ事が出来る。

上記連分数展開を使い Lemma 3 の (0), (1) が順次適用出来る場合は (0) の右辺第1項の ψ_I はお互に打ち消しあい，第2項の ψ_{II} のみが残り，結局 $A_0, \cdots, A_k$ とずらしてゆけば，次のような"分岐型の反転公式"を得る。

[定理 2] $k \geq 0$ に対し（Lemma 3 の (2) (1) が反復適用出来る場合は）

$$\Psi^*\left(A_0^{-1}\,;\ \mathbb{b}_2,\ k_2\,;\ \mathbb{b}_1,\ k_1\,;\ \mathbb{P},\ \gamma,\ D\right)$$

$$\doteqdot \left|\det\left(A_{k+1}\cdots A_1\right)\right|^{-\frac{1}{2}} \times e\left(\sum_{j=1}^{k+1}\tfrac{1}{2}A_j^{-1}[\gamma^{(j)}]\right)\times$$

$$\times(\pm)\times e\left(\tfrac{1}{8}\times\{\text{整数}\}\right)\times$$

$$\times\Psi_{\mathrm{I}}\left((-1)^{k+1}A_{k+1}^{-1}\,;\ \begin{pmatrix}&-1\\1&\end{pmatrix}\cdot\frac{(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}\Delta\frac{k_2^2}{k_2-k_1}Q_k(\mathbb{b}_2-\mathbb{b}_1)+(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\cdot\tilde{B}_{k+1}\begin{pmatrix}&-1\\1&\end{pmatrix}\mathbb{b}_1}{-\det\tilde{B}_{k+1}+\frac{k_2^2}{k_2-k_1}\check{U}_{k+1}[\mathbb{b}_2-\mathbb{b}_1]}\right.,$$

$$,\ (-)\frac{-\det\tilde{B}_{k+1}+\frac{k_2^2}{k_2-k_1}\check{U}_{k+1}[\mathbb{b}_2-\mathbb{b}_1]}{\Delta^2\frac{k_2^2}{k_2-k_1}\det Q_k-\check{U}_{k+1}[\mathbb{b}_2-\mathbb{b}_1]}\,;$$

$$;\ \begin{pmatrix}&-1\\1&\end{pmatrix}\ast\frac{\Delta\frac{k_2}{k_2-k_1}(-1)^{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}\cdot Q_k^{(-)}(k_2\mathbb{b}_2-k_1\mathbb{b}_1)+(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\cdot\tilde{B}_{k+1}\begin{pmatrix}&-1\\1&\end{pmatrix}\mathbb{b}_1}{\frac{k_2}{k_2-k_1}\cdot{}^t(\mathbb{b}_2-\mathbb{b}_1)\check{U}_{k+1}\cdot(k_2\mathbb{b}_2-k_1\mathbb{b}_1)-\det\tilde{B}_{k+1}},$$

$$,\ (-)\frac{\left\{\frac{k_2}{k_2-k_1}{}^t(\mathbb{b}_2-\mathbb{b}_1)\cdot\check{U}_{k+1}(k_2\mathbb{b}_2-k_1\mathbb{b}_1)-\det\tilde{B}_{k+1}\right\}^2}{\left(\frac{\Delta^2k_2^2}{k_2-k_1}\det Q_k-\check{U}_{k+1}[\mathbb{b}_1]\right)\left(\frac{1}{k_2-k_1}\check{U}_{k+1}[k_2\mathbb{b}_2-k_1\mathbb{b}_1]-\det\tilde{B}_{k+1}\right)};$$

$$\left.;\ \mathbb{P}^{(k+1)},\ \gamma^{(k+1)},\ D\right)$$

(次頁迄続く)

$$+(\pm)\cdot e\left(\tfrac{1}{8}\times\text{整数}\right)\times$$

$$\times\Psi_{\mathrm{I}}\left((-)^{k+1}A_{k+1}^{-1}\,;\ \begin{pmatrix}&-1\\1&\end{pmatrix}\cdot\frac{\Delta\frac{k_1k_2}{k_2-k_1}(-1)^{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}Q_k^{(-)}(\mathbb{b}_2-\mathbb{b}_1)+(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\cdot\tilde{B}_{k+1}\begin{pmatrix}&-1\\1&\end{pmatrix}\mathbb{b}_2}{\det\tilde{B}_{k+1}+\frac{k_1k_2}{k_2-k_1}\check{U}_{k+1}[\mathbb{b}_2-\mathbb{b}_1]}\right.,$$

(※)

$$,\ (-)k_2\cdot\frac{\frac{k_1k_2}{k_2-k_1}\check{U}_{k+1}[\mathbb{b}_2-\mathbb{b}_1]-\det\tilde{B}_{k+1}}{\det\tilde{B}_{k+1}+\frac{k_2}{k_2-k_1}\left(k_1k_2\Delta^2\det Q_k-(k_2-k_1)\check{U}_{k+1}[\mathbb{b}_2]-k_1\cdot\check{U}_{k+1}[\mathbb{b}_2-\mathbb{b}_1]\right)};$$

$$;\ \begin{pmatrix}&-1\\1&\end{pmatrix}\cdot\frac{\Delta\frac{k_2}{k_2-k_1}(-1)^{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}\cdot Q_k^{(-)}(k_2\mathbb{b}_2-k_1\mathbb{b}_1)+(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\tilde{B}_{k+1}\begin{pmatrix}&-1\\1&\end{pmatrix}\mathbb{b}_1}{\frac{k_2}{k_2-k_1}{}^t(\mathbb{b}_2-\mathbb{b}_1)\cdot\check{U}_{k+1}(k_2\mathbb{b}_2-k_1\mathbb{b}_1)-\det\tilde{B}_{k+1}},$$

(前頁から括弧続き)

$$, (-)\, k_1 \frac{\left\{ \frac{k_2}{k_2-k_1}\, {}^t(\mathbf{b}_2-\mathbf{b}_1)\, \check{O}_{k+1} (k_2\mathbf{b}_2 - k_1\mathbf{b}_1) - \det \tilde{B}_{k+1} \right\}^2}{\left(\frac{1}{k_2-k_1}\, \check{O}_{k+1}[k_2\mathbf{b}_2 - k_1\mathbf{b}_1] - \det \tilde{B}_{k+1} \right) \times \left(\text{前頁下の(*)の分母と同じ因子}\right)} ;$$

$$; \mathbb{P}^{(k+1)},\ \gamma^{(k+1)},\ D \Big)$$

$$+ (\pm) \times e\left(\tfrac{1}{8} \times (\text{整数})\right) \times$$

$$\times\, \psi_I \Bigg((-1)^{k+1} A_{k+1}^{-1} ;\ (-) \frac{(-1)^{\frac{(k+1)(k+2)}{2}} \Delta\, (1, -1)\, Q_k (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1)}{\check{O}_{k+1}[\mathbf{b}_2-\mathbf{b}_1]} ,\ (-) \frac{\check{O}_{k+1}[\mathbf{b}_2-\mathbf{b}_1]}{\Delta^2 \det Q_k} ;$$

$$; \frac{(-1)^{\frac{(k+1)(k+2)}{2}} \cdot \Delta\, (1, -1) \cdot Q_k \cdot \mathbf{b}_1}{{}^t\mathbf{b}_1 \cdot \check{O}_{k+1} \cdot (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1)} ,\ (-) \frac{\left\{ {}^t\mathbf{b}_1\, \check{O}_{k+1} (\mathbf{b}_2-\mathbf{b}_1) \right\}^2}{\Delta^2 \cdot \det Q_k \cdot \check{O}_{k+1}[\mathbf{b}_1]} ;$$

$$; \mathbb{P}^{(k+1)},\ \gamma^{(k+1)},\ D \Bigg)$$

$$+ (\pm) \times e\left(\tfrac{1}{8} \times (\text{整数})\right) \times$$

$$\times\, \psi_I \Bigg((-1)^{k+1} A_{k+1}^{-1} ;\ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \Delta \frac{k_2^2}{k_2-k_1} \cdot Q_k (\mathbf{b}_2-\mathbf{b}_1) + (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \tilde{B}_{k+1}\, (1, -1)\, \mathbf{b}_1}{-\det \hat{B}_{k+1} + \frac{k_2^2}{k_2-k_1}\, \check{O}_{k+1}[\mathbf{b}_2-\mathbf{b}_1]} ,$$

$$, (-) \frac{(-) \det \tilde{B}_{k+1} + \frac{k_2^2}{k_2-k_1}\, \check{O}_{k+1}[\mathbf{b}_2-\mathbf{b}_1]}{\Delta^2 \frac{k_2^2}{k_2-k_1} \cdot \det Q_k - \check{O}_{k+1}[\mathbf{b}_2-\mathbf{b}_1]} ;$$

$$; (1, -1) \cdot \frac{(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \Delta \cdot Q_k \cdot \mathbf{b}_1}{{}^t\mathbf{b}_1 \cdot \check{O}_{k+1} \cdot (\mathbf{b}_2-\mathbf{b}_1)} ,$$

$$, (-) \frac{\frac{k_2^2}{k_2-k_1} \cdot \left\{ {}^t\mathbf{b}_1\, \check{O}_{k+1} (\mathbf{b}_2-\mathbf{b}_1) \right\}^2}{\check{O}_{k+1}[\mathbf{b}_1] \cdot \left(\Delta^2 \frac{k_2^2}{k_2-k_1} \cdot \det Q_k - \check{O}_{k+1}[\mathbf{b}_1] \right)} ;\ \mathbb{P}^{(k+1)},\ \gamma^{(k+1)},\ D \Bigg)$$

$$+ O(\log \cdot \text{因子})$$

となる。

定理1の右辺の$\Psi(\cdots)$ では $A' = A^{-1}$ $(R = (0))$ とすると Lemma 3 の(i) の場合になる。

5° Lemma 2 (いわゆる van der Corput 型) に相当する事も得られるがここには記さない。和をとる領域 $\mathcal{R}$ に強い制限をつけて Bruhat 分解を使うと式の複雑さは減ずる。A が退化する時はまだ十分扱ってない。*)

[1] Y.-N. Nakai, On a θ-Weyl sum, Nagoya Math. J., Vol.52, 1973 163/172.

[2] 中井喜信, θ-Weyl 和, 数理解析研究所講究録 222号, 1974年, 10ページ分.

*) 短報は第2回日米セミナ報告集(ミシガン大学 1975年6月)にも所載。